



Semaine d'Etude Mathématiques et Entreprises 4 : Planification optimale de production d'énergie sous contraintes technologiques

Pierre Bochard, Sylvain Carré, Rémi Catellier, Franck Gabriel, Viviana
Letizia, Tuan Tran

► To cite this version:

Pierre Bochard, Sylvain Carré, Rémi Catellier, Franck Gabriel, Viviana Letizia, et al.. Semaine d'Etude Mathématiques et Entreprises 4 : Planification optimale de production d'énergie sous contraintes technologiques. 2012. hal-00793550

HAL Id: hal-00793550

<https://hal.science/hal-00793550>

Preprint submitted on 22 Feb 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMAINE D'ETUDE MATHS-ENTREPRISES 4
15–19 octobre 2012, Institut Henri Poincaré (Paris)

Planification optimale de production d'énergie
sous contraintes technologiques

Pierre BOCHARD^a Sylvain CARRÉ^b
Rémi CATELLIER^c Franck GABRIEL^d
Viviana LETIZIA^c Tuan TRAN^c

^a *Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris 11, France*

^b *École Normale Supérieure, Paris, France*

^c *Centre de Recherche en Mathématique de la Décision, Université Paris Dauphine, France*

^d *Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Université Paris 6, France*

Sujet proposé par



Correspondant : Gilles PERRIN (AREVA)



Résumé

Ce papier est une synthèse de notre travail de recherche durant la quatrième SEME (Semaine d'Etudes pour les Mathématiques en Entreprise), à l'Institut Henri Poincaré. Nous remercions les organisateurs de la semaine ainsi que Gilles Perrin (AREVA) qui nous a proposé le sujet. L'objectif était de trouver une méthode pour approcher au mieux une courbe de consommation d'énergie anticipée sous des contraintes technologiques (par exemple le fait que les machines mettent du temps à changer de niveau de productivité, ou mettent parfois un temps incompressible minimal à se relancer si elles ont arrêté de produire. Nous proposons deux approches complémentaires : la première est inspirée de la théorie du contrôle optimal et la seconde s'appuie sur l'analyse convexe.

This paper is a synthesis of our research work during the fourth "SEME" (Week of Mathematical Studies for Firms) in Institut Henri Poincaré, Paris. We are grateful to the organizers of the week and to Gilles Perrin (AREVA) who suggested the topic. The goal was to come up with a method to target as precisely as possible an expected energy consumption curve under technological constraints (e.g. the fact that machines can not switch too quickly between different productivity levels, or may need a minimal amount of time to be restarted should their production reach zero at some point). In this paper we describe two approaches : the first one is inspired from optimal control theory while the second one relies on convex analysis.

Mots clés : Optimisation de production sous contrainte, Contrôle optimal, Production nucléaire, Stockage.

Numéro de publication : SEME004-2012-10-A

Table des matières

1	Présentation du problème	2
1.1	Les moyens de production	2
1.2	Les moyens de stockage	3
2	Contrôle optimal	3
2.1	Un seul producteur	3
2.1.1	La difficulté du problème	3
2.1.2	Solution exacte	4
2.1.3	Approximation numérique, méthode backward	5
2.1.4	Quelques courbes	6
2.2	Un producteur et un stockeur	8
2.2.1	Présentation de la résolution numérique	8
2.2.2	Résultats numériques	8
2.3	Extensions	11
2.3.1	La contrainte du nucléaire	11
2.3.2	Le cas stochastique	11
2.3.3	Directions de recherche	12
3	Analyse convexe	13
3.1	(Re)Formulation du problème	13
3.1.1	Une fonctionnelle naïve	13
3.1.2	Une « bonne » fonctionnelle	15
3.1.3	Les contraintes	15
3.1.4	Formulation explicite du problème	16
3.2	Résolution	16
3.2.1	Formulation discrète	16
3.2.2	Résultats numériques	17
3.2.3	Limitation du modèle et quelques éléments de réponse.	20

Un fournisseur d'énergie doit être capable de répondre en continu à la demande de consommation et doit pour cela adapter fréquemment sa production. Outre la difficulté liée aux variations imprévues de demande, il faut aussi tenir compte des limitations des appareils de production : ceux-ci sont en pratique limités quant à leur variation du niveau de production en un temps donné. De même les outils de stockage sont sujets à des contraintes sur la vitesse à laquelle ils emmagasinent l'énergie. D'autres part, certaines techniques présentent des spécificités dont il faut absolument tenir compte : ainsi un réacteur nucléaire qui vient de s'arrêter ne saurait produire à nouveau avant une durée minimale, de l'ordre de quelques heures. Les sources d'énergie *fatales*, quant à elles, sont soumises aux aléas de l'environnement et ne se prêtent donc pas facilement au contrôle.

Dans ce contexte, deux questions se posent : étant donné un *parc* (ensemble de moyens de production et de stockage), comment planifier au mieux la production d'énergie ? Et comment définir un parc optimal ? Nous nous intéresserons surtout à la première question, la deuxième nécessitant l'introduction de coûts (construction, entretien...) ce qui nous porterait vers une autre problématique.

Dans un premier temps, on considère le cas déterministe : la demande $C(t)$ est connue de façon certaine et il n'y a pas de source d'aléa. On dispose de N moyens de production ou stockage, qui produisent la puissance $E'_i(t)$. On suppose qu'on ne peut pas dépasser la courbe C et qu'on veut au maximum éviter d'acheter la puissance manquante à l'extérieur. On cherche donc à résoudre :

$$\min \int_0^T \Psi \left(C(t) - \sum_{i=1}^N E'_i(t) \right) dt,$$

sous contraintes $C(t) \geq \sum_{i=1}^N E'_i(t)$ et les contraintes technologiques que nous expliciterons ultérieurement (par exemple $|E''_i(t)| \leq x_0$).

Ψ est une fonction de coût à préciser (en pratique, linéaire ou quadratique).

Nous proposons deux approches à ce problème : la première est inspirée de la théorie du contrôle optimal et la seconde s'appuie sur l'analyse convexe.

1 Présentation du problème

1.1 Les moyens de production

On distingue ici par le terme "moyens de production" les transformations irréversibles conduisant à obtenir de l'énergie (nucléaire, éolien, solaire). Ces moyens contrastent avec des moyens de "stockage" (piles, condensateurs) qu'on l'on étudiera et prendra en compte par la suite. La distinction se fonde sur le fait que les contraintes associées à ces deux genres de moyens sont différentes : on a typiquement des contraintes en puissance sur la première catégorie et en énergie sur la seconde.

Même au sein des moyens de production, d'importantes nuances sont à prendre en compte qui vont influencer sur la modélisation. On pourra en effet considérer que certains moyens

de production se modélisent bien de façon déterministe (nucléaire, charbon, gaz) (aux accidents près...). D'autres nécessitent un cadre stochastique (éolien, solaire) car l'énergie extraite provient de phénomènes que l'on ne peut pas parfaitement anticiper.

Le cas de la production nucléaire nécessite encore une complication de modélisation, qui a un impact fort sur le choix de la méthode à employer pour résoudre le problème. En effet, en cas de baisse de puissance trop importante, un excédent de xénon est dégagé et empêche la production de repartir instantanément, le xénon en excès jouant le rôle d'absorbant neutronique. Il faut donc attendre environ une dizaine d'heures afin de pouvoir relancer la production. Pour la modélisation, on considérera donc que la puissance fournie doit soit être égale à zéro, soit être comprise entre deux bornes strictement positives, avec la condition supplémentaire que la production doit rester à zéro pendant dix heures minimum une fois qu'elle atteint zéro.

De façon générale, les moyens de production ne peuvent pas changer de productivité à des vitesses arbitrairement grandes, les machines étant sujettes à des contraintes physiques. Ce "coût d'ajustement" peut se modéliser soit en imposant des bornes sur la dérivée de la puissance fournie, soit en ajoutant au programme de minimisation un coût qui est fonction de cette dérivée, et qui devient très grand lorsque l'ajustement est trop rapide.

1.2 Les moyens de stockage

Un autre moyen de fournir de la puissance au consommateur est de puiser dans un stockage (condensateur, volant d'inertie, barrage). Les transformations physiques ici à l'oeuvre sont réversibles, dans un sens large, ce qui permet également de recharger les moyens de stockage lorsque l'on produit par ailleurs suffisamment. On le voit, les moyens de stockage permettent de "lisser" la courbe de puissance fournie en s'affranchissant partiellement des contraintes des moyens de production, afin de coller plus précisément à la courbe de consommation.

Les stockages sont sujets à des contraintes différentes des moyens de production : il faudra donner une borne supérieure à l'énergie qu'ils peuvent emmagasiner, et prendre en compte le fait que l'on ne peut pas faire varier trop rapidement le stock d'énergie : on aura donc une contrainte sur la puissance (et non sur sa dérivée, comme précédemment) : cette dernière devra typiquement être comprise entre deux bornes, l'une négative et l'autre positive.

2 Contrôle optimal

2.1 Un seul producteur

2.1.1 La difficulté du problème

Même dans le cas où notre parc de production n'est constitué que d'un unique moyen de production et aucun moyen de stockage, il faut faire attention dans la détermination de la solution optimale. Une approche naïve consisterait à suivre la courbe de consommation tant que la contrainte sur la dérivée de la puissance est satisfaite, puis de bloquer la productivité à son niveau minimal ou maximal si $C'(t)$ devient trop grand en valeur absolue.

Cette méthode "myope" est insuffisante en ce qu'elle ne tient pas compte des évolutions futures de $C(t)$. Or, il se peut tout à fait que la courbe de consommation chute soudainement (c'est d'ailleurs le cas en pratique, aux heures avancées de la nuit). Dans ce cas, la contrainte d'ajustement de la productivité nous empêche de diminuer la production P assez rapidement et on viole alors la contrainte $P(t) \leq C(t)$.

Tout cela nous conduit à comprendre que la détermination de la courbe de production optimale en t doit prendre en compte tout le futur de la consommation, soit $C([t, T])$. Cette idée est à la base de la méthode backward, qui va justement supposer le problème résolu sur la droite de la courbe et résoudre de proche en proche vers le temps 0. Dans le cas d'un producteur seul, on peut cependant expliciter dès maintenant la solution optimale.

2.1.2 Solution exacte

Notons qu'on peut dériver de façon analytique la solution exacte en utilisant la théorie du contrôle optimal. Cela nous obligerait à un long détour technique sans grand intérêt pour notre exposé. On donne ici une construction "avec les mains". De plus on se place provisoirement dans le cas où $P_{min} = 0$ pour simplifier.

En fait, dans les sections où la dérivée de la consommation est entre les bornes imposées par les contraintes, il n'y a pas de problème : on voudrait simplement suivre la courbe de consommation. Encore faut-il être capable d'obtenir $P = C$ au début de chacune de ces sections. Pour cela, on raccorde les zones où la dérivée de C est trop grande par un "pont" (fonction affine en deux morceaux où la dérivée vaut la valeur maximale autorisée). Il est assez clair que cette solution est la meilleure qui satisfasse les contraintes de vitesse d'ajustement ainsi que $P \leq C$.

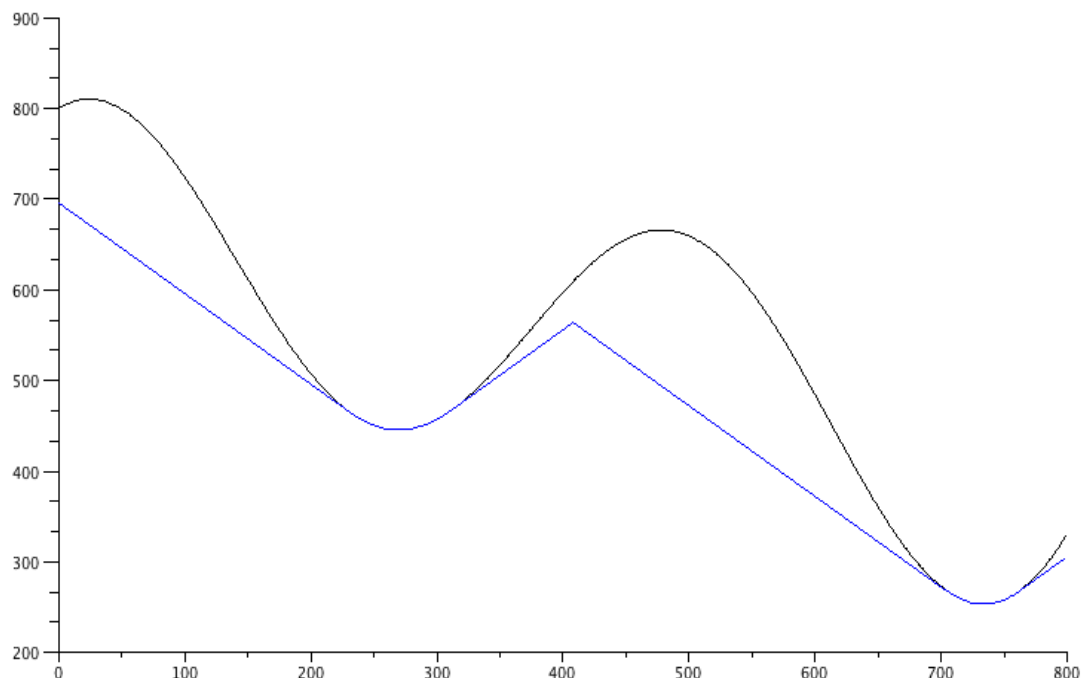


FIGURE 1

2.1.3 Approximation numérique, méthode backward

Il est naturel de procéder numériquement, en utilisant des discrétisations : en temps mais aussi en espace, ce dernier terme devant être précisé. En fait, la théorie du contrôle optimal va nous conduire au choix d'une méthode "backward" : le temps étant composé des périodes $t = 0, \dots, T$ on va supposer le problème résolu en T et en déduire la solution en $T - 1$, et ainsi de suite.

On commence par le cas d'un parc constitué d'un unique producteur, soumis à :

$$E' \in \{0\} \cup [P_{min}, P_{max}], \quad (1)$$

$$|E''| \leq x_0. \quad (2)$$

La seconde condition semble contredire la possibilité de passer de P_{min} à 0. L'hypothèse retenue est que le producteur choisit une puissance vérifiant la condition d'être plus petite que P_{max} et la borne sur la dérivée, sachant que s'il choisit une puissance plus petite que P_{min} la puissance effective sera nulle.

On définit la *fonction valeur* V , par

$$V(t, i) = \inf \int_t^T \Psi \left(C(t) - \sum_{i=1}^N E'_i(t) \right) dt,$$

pour $t = 0, \dots, T$ et $0 \leq i \leq P_{max}$ les indices possibles pour la puissance, sur notre grille de discrétisation : l'infimum est à prendre sous la contrainte $P_t = i$. Le sens de cette définition est bien de supposer le problème résolu en temps et en espace afin de pouvoir procéder "backward". Pour le moment, on suppose $\Psi = Id$. Cela sert à simplifier l'exposition sans nuire à la généralité : la méthode proposée ici s'étend au cas de Ψ quelconque. On a la condition terminale :

$$V(T, i) = C(T) - i,$$

si $C(T) \geq i$, et $+\infty$ sinon.

On observe de plus que, si $i \leq C(T - 1)$,

$$V(T - 1, i) = \min_j (C(T - 1) - i + V(T, j)),$$

le minimum étant pris sur les j *admissibles*, soit, avec un abus de notation transparent (sur x_0) :

$$|i - j| \leq x_0,$$

$$j \in \{0\} \cup [P_{min}, P_{max}].$$

Cette équation se propage jusqu'au temps 0, la fonction V vérifie :

$$V(t, i) = \min_j (C(t) - i + V(t + 1, j)),$$

le minimum étant pris sur les j admissibles.

Il est essentiel de noter que ce qui nous intéresse en premier lieu n'est pas tant la valeur de v que le *contrôle optimal* qu'elle fournit : le j , dénoté $j^*(t, i)$, qui minimise le terme de

droite et qui représente la puissance qu'il convient optimalement de fournir en $t + 1$.

Tout est donc en place pour expliciter l'algorithme de résolution de ce premier cas particulier :

- Création d'une grille de taille $T \times P_{max}$.
- Calcul de $V(T, \cdot)$.
- Calculs successifs des $V(t, i)$ en enregistrant tous les $j^*(t, i)$.
- On cherche ensuite le minimum en i des $V(0, i)$: il correspond à la solution optimale i_0^* de production en 0. Ceci donne la production optimale en 1 : $i_1^* = j^*(0, i_0^*)$.
- La suite des contrôles (puissances) à choisir par la suite est donnée par $i_{t+1}^* := j^*(t, i_t^*)$. On a donc obtenu la meilleure courbe de production possible pour le modèle discrétisé.

2.1.4 Quelques courbes

Dans les courbes suivantes, issues de l'algorithme présenté précédemment, la courbe noire représente la consommation prévue, tandis que la courbe bleue représente la production d'énergie. Si le moyen de production n'est pas limité au niveau de la dérivée de puissance, la production colle à la courbe C à l'exception des moments où $C(t) < P_{min}$.

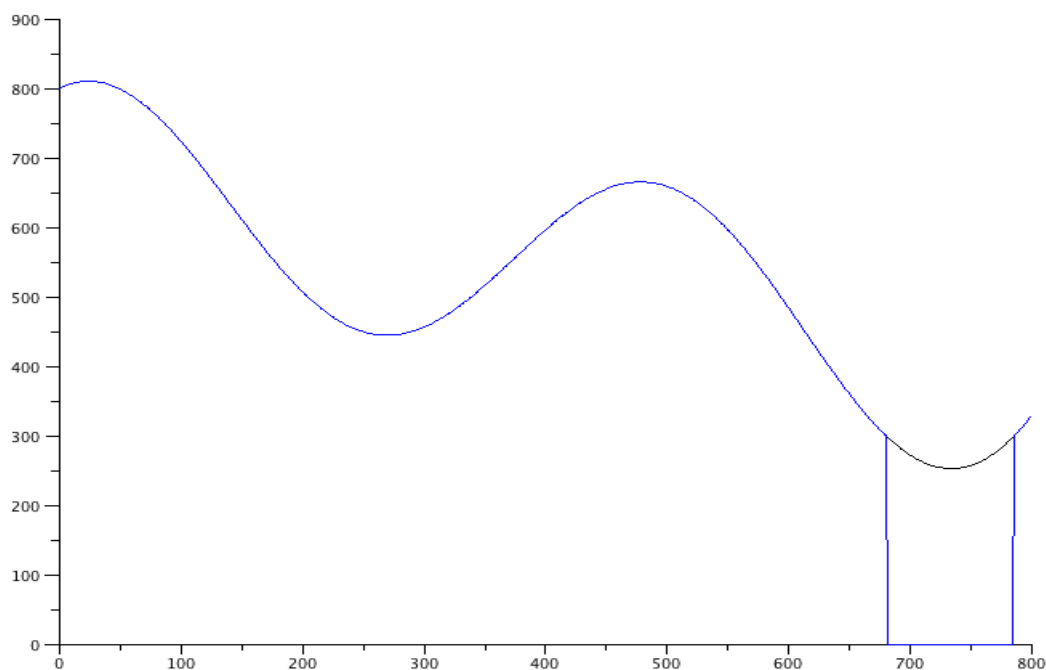


FIGURE 2

Au contraire, si le moyen de production est limité au niveau de la dérivée de puissance, on observe une courbe ressemblant à celle présentée dans la section 2.1.2 :

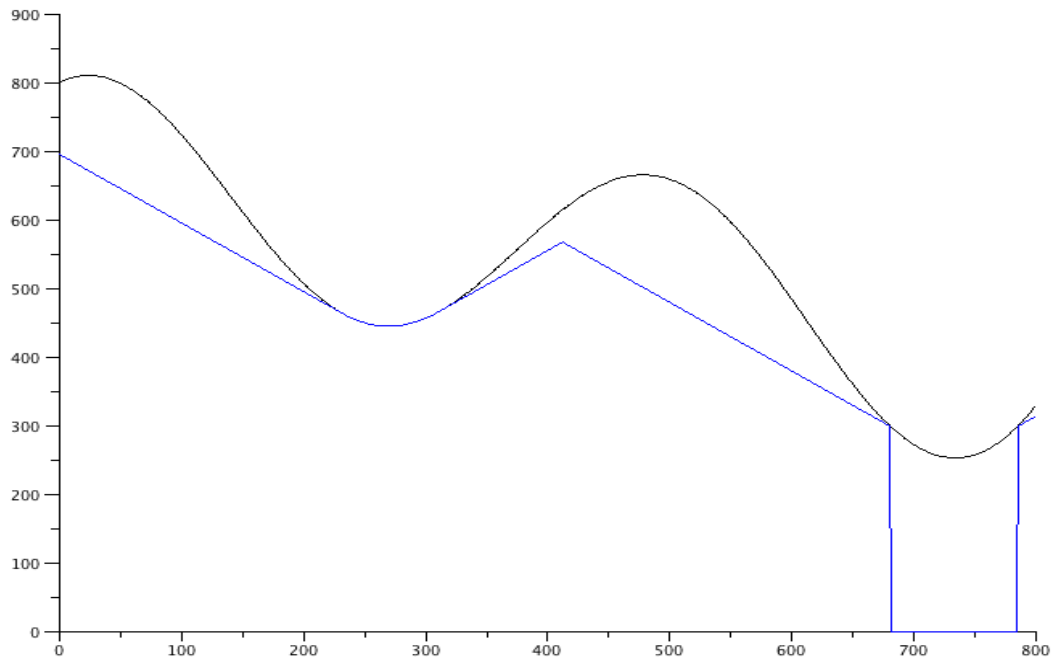


FIGURE 3

Il est tout de même important de remarquer que la solution dans ce cas diffère de l'exemple donné en 2.1.2 comme on peut le constater sur la figure 4. Imposer la condition (1) n'est pas bénin : la nouvelle solution n'est pas qu'une troncature de la solution au problème avec la condition $P \in [0, P_{max}]$.

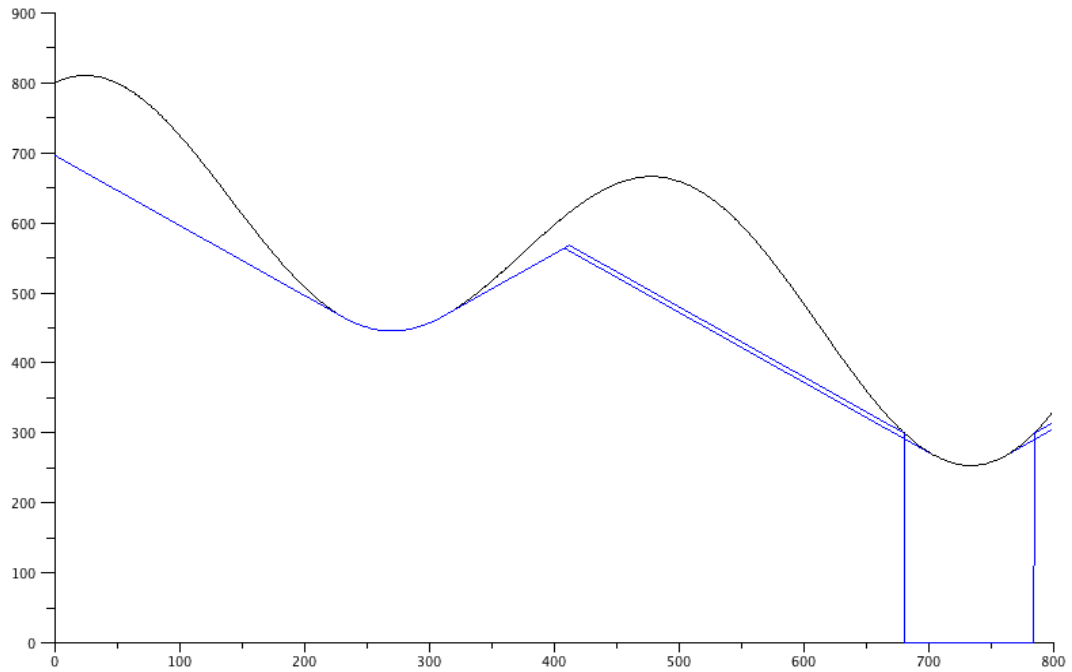


FIGURE 4

2.2 Un producteur et un stockeur

On suppose maintenant que le parc est constitué d'un moyen de production (notation P pour E'_1) analogue au précédent et d'un stockage (notation E pour E_2) devant vérifier outre les conditions précédentes sur P :

$$0 \leq E \leq E_{max},$$

$$|E'| \leq y_0.$$

En pratique, ces conditions signifient que le stockage a une capacité limitée et qu'on l'on ne peut pas charger ou décharger instantanément. Sur le principe, la méthode reste identique au cas précédent : il nous faut cependant introduire une dimension supplémentaire (en espace) dans la grille : un axe relatif aux niveaux (discrétisés) possibles pour l'énergie.

2.2.1 Présentation de la résolution numérique

Notre fonction valeur $V(t, i, e)$ se comprend désormais comme la solution du problème de minimisation partant du temps t , avec $P_t = i$ et $E_{t-1} = e$. Dans ce contexte, si f désigne le contrôle sélectionné en énergie, la puissance effectivement fournie est $i + e - f$. La fonction valeur vérifie donc :

$$V(T, i, e) = \min_f [C(T) - (i + e - f)],$$

sur les f admissibles (condition de dérivée bornée par y_0 , d'énergie maximum, et $i + e - f \leq C(T)$). On a alors pour tout $t < T$:

$$V(t, i, e) = \min_{j, f} [C(t) - (i + e - f) + V(t + 1, j, f)],$$

sur les (j, f) admissibles (conditions déjà mentionnées).

L'algorithme qui découle de ces égalités est similaire au précédent. Bien évidemment son temps d'exécution est plus grand.

2.2.2 Résultats numériques

Dans les simulations suivantes, sans perte de généralité sur la mise en place de l'algorithme, la valeur de l'énergie stockée dans les moyens de stockages avant le temps $t = 0$ a été fixée.

- **Un producteur avec ou sans stockeur.** La figure 5 permet de comparer la production totale avec ou sans stockage. La courbe noire représente la consommation C , la courbe verte est la production dans le cas d'un producteur seul tandis que la bleue se comprend comme la production globale (producteur et stockage) dans le cas d'un producteur épaulé d'un moyen de stockage.

Il est rassurant de constater la nette amélioration dans l'optimisation du problème lorsque l'on s'autorise un stockage. De plus dans le test précédent, la puissance du stockage (la dérivée de l'énergie stockée) est limitée à 4. Or on observe une différence entre les deux courbes (verte et bleue) de plus de 4 : le stockage n'est pas juste un moyen d'avoir de la puissance en plus à certains moments mais est en prime un moyen de modifier la production en se permettant de produire plus.

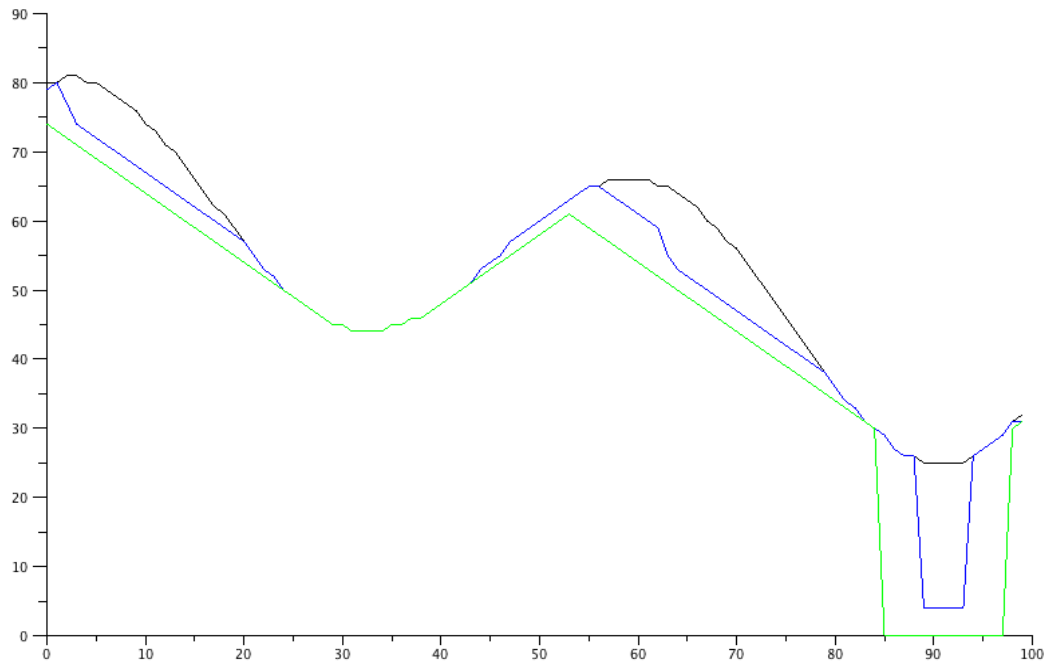


FIGURE 5

- **Stockage rapide ou stockage important ?** Une simulation intéressante consiste à étudier l'effet de la vitesse de stockage/déstockage. Dans les simulations suivantes, la courbe noire représente toujours la consommation, la courbe verte l'énergie stockée, la courbe bleue ciel est la production due au moyen de production, et la bleue sombre est à comprendre comme la production totale (producteur et stockage).

Au niveau des paramètres de simulation, nous n'avons modifié que ceux relatifs au stockage. Alors que nous avons gardé un niveau maximal de 40 lors des deux simulations, dans la figure 6 la puissance que l'on peut fournir est bornée par 1 tandis que la puissance maximale délivrée est égale en valeur absolue à 4 dans la figure 7.

Dans la figure 6, la limitation sur la vitesse de stockage empêche d'atteindre l'énergie maximale stockable : celle-ci se trouve limitée à une valeur de plus ou moins 20. Le stockage mis en place est donc trop gros, un stockage de 20 aurait suffi. Dans la figure 7, l'énergie maximale stockable est atteinte, on observe une nette amélioration dans l'optimisation du problème posé. Ceci éclaire le fait que dans la modélisation proposée, il ne sert à rien d'avoir de gros stockages si la vitesse de stockage/déstockage ne suit pas.

Pour l'industriel, cette remarque peut être d'importance : au moment de choisir la capacité de ses moyens de stockage, une estimation préalable de ce type peut éventuellement éviter d'investir dans une capacité trop importante, donc plus coûteuse.

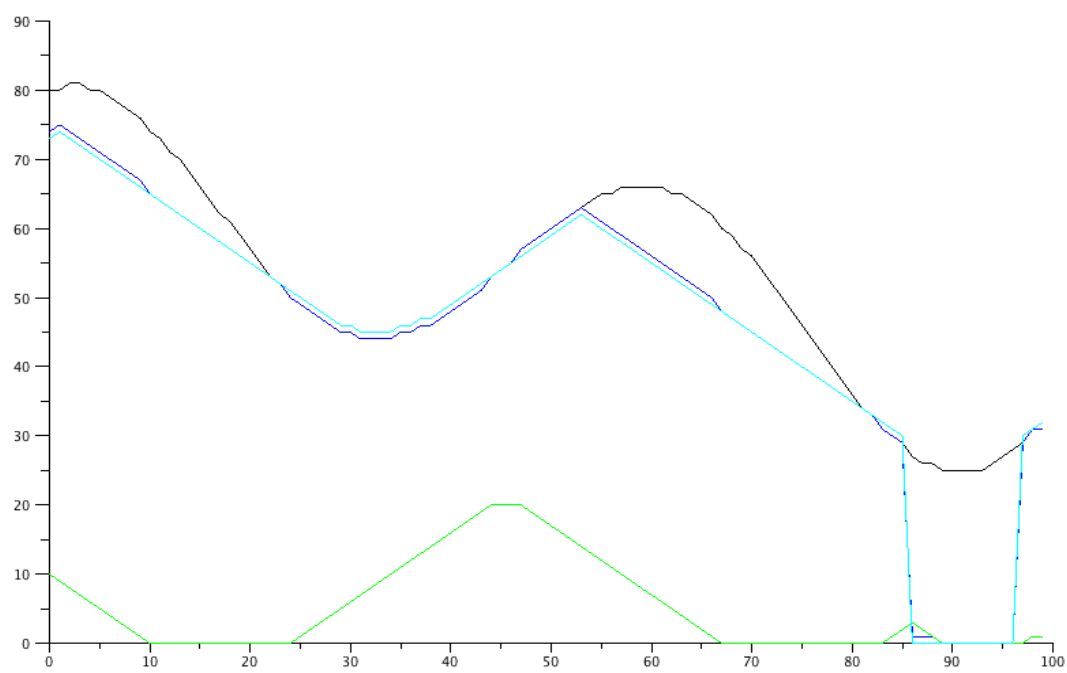


FIGURE 6

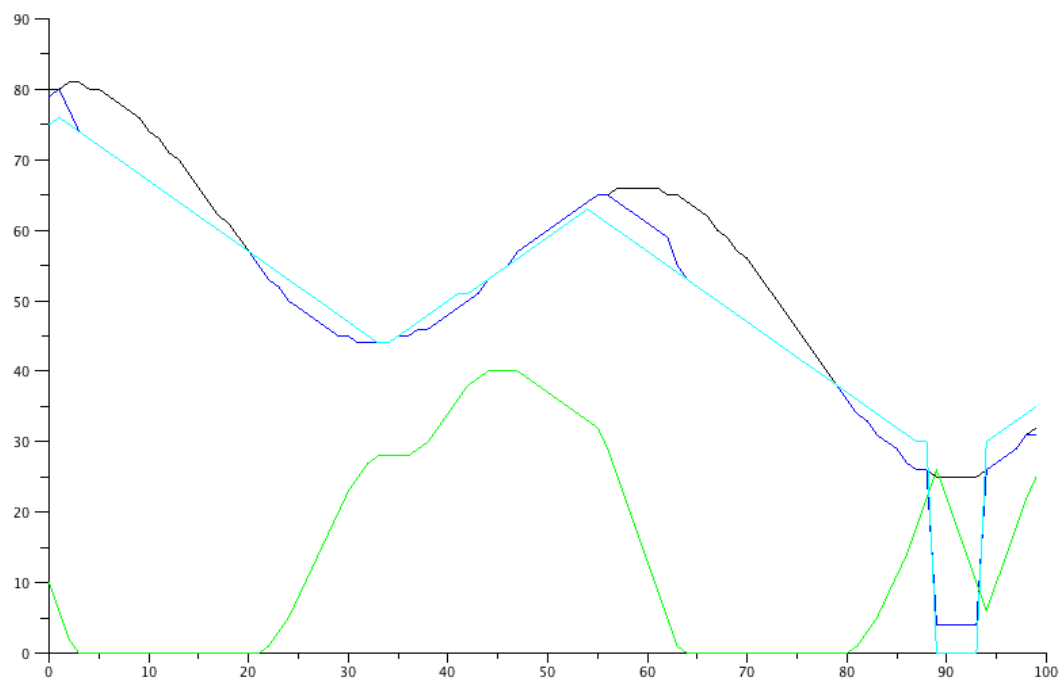


FIGURE 7

2.3 Extensions

2.3.1 La contrainte du nucléaire

La production d'énergie nucléaire présente un défi pour le modélisateur : en effet, il doit prendre en compte le fait que si la production atteint zéro, elle devra y rester pendant un laps de temps minimal t_0 . Cette contrainte ne s'intègre pas facilement au sein de programmes de minimisation classiques (notamment, elle semble impossible à traiter par les méthodes qui demandent de la convexité). Dans notre approche, elle peut naturellement être incorporée : il faut cependant souhaiter avoir t_0 petit devant T pour éviter une augmentation trop importante du temps de calcul.

On va en fait rendre le problème "markovien" en ajoutant un axe à la grille, pour la variable τ qui vaut -1 si $P \neq 0$ et $k \geq 0$ si $P = 0$ depuis k périodes exactement. On aura alors une condition terminale identique au cas précédent et une équation "backward" seulement modifiée par la définition des couples (j, f) admissibles : (j, f) est désormais admissible si et seulement s'il vérifie les conditions déjà requises ainsi que la suivante : si $\tau \in [0, t_0 - 1]$ alors $j = 0$.

Temps de calcul : si τ_t et P_{t+1} sont donnés, il n'y a qu'une seule possibilité pour τ_{t+1} . Donc l'introduction de la contrainte du nucléaire ne rallonge pas le temps de calcul à chaque noeud. Par contre, il faut prendre en compte plus de valeurs de τ possibles, donc, dans une implémentation naïve, le temps de calcul est multiplié par t_0 .

2.3.2 Le cas stochastique

Nous avons travaillé dans un cadre déterministe. La consommation était prévue de façon exacte et aucun aléa n'était supporté par la production énergétique. Deux facteurs sont donc à prendre en compte pour une modélisation plus réaliste :

- **$C(t)$ n'est qu'une *prévision*** : il est donc naturel d'autoriser un aléa. La résolution par méthode backward permet de prendre en compte toute modélisation de cet aléa. Une possibilité d'aléa peut être un bruit blanc, de moyenne nulle, de variance dépendant ou non de la valeur de $C(t)$. Si la prévision n'est pas sans biais on peut aussi considérer un bruit modélisé par un processus autorégressif (ARMA).
- **Les énergies d'origine renouvelable** : Dans les diverses modélisations précédentes, seules les énergies déterministes ont été prises en compte. Afin d'incorporer les productions aléatoires P_{alea} , il suffit de soustraire à la prévision de la demande C la prévision faite sur P_{alea} . Ceci entraîne donc un nouvel aléa supporté par la fonction de consommation.

Face à une consommation réelle C^* doublement aléatoire, nous cherchons à construire un contrôle opérationnel. Au temps t , le contrôle doit prendre en compte non seulement la prévision C mais aussi les aléas passés $(C^*(s))_{s < t}$. De plus la contrainte $P < C^*$ n'a plus de sens : le planificateur ne faisant face à l'aléa du temps t qu'une fois les décisions prises, il se pourrait bien que la consommation baisse énormément mettant à mal la contrainte $P < C^*$. Deux possibilités se présentent : supposer l'aléa borné afin de pouvoir travailler avec cette condition, mais ceci se ramène au cas non stochastique quitte à baisser la prévision de la

moitié de la longueur du support de l'aléa, ou faire apparaître une nouvelle contrainte, celle d'obligation, si possible, de stocker les excédents (aléatoires).

Dans le cas de producteurs seuls, on peut montrer que l'ajout d'aléa change la stratégie mais celle-ci reste déterministe. L'introduction de stockage permet d'avoir une stratégie adaptée aux aléas réalisés.

Quel est le comportement du planificateur face à de l'aléa ? Celui-ci connaît au début de la période t :

1. l'énergie disponible dans les stockages au temps $t - 1$, e_{t-1} ,
2. la production (choisie en $t - 1$) au temps t ,
3. la consommation prévue en t .
4. les aléas passés ($\varepsilon_s := C^*(t) - C(t)$) $_{s \leq t-1}$.

Notons qu'il n'a pas accès à la consommation réelle $C^*(t)$, dévoilée à la fin de la période t .

Il doit alors choisir la production p_{t+1} pour la période $t + 1$ ainsi que l'énergie à stocker $e_{prev}(t)$ en t , tout en prenant en compte les contraintes techniques (sur P , \dot{P} , E , \dot{E}). La production totale (production plus stockage) choisie au temps t est donc égale à $P_{prev}(t) = e_{t-1} - e_{prev}(t) + p_t$. Cependant à la fin de la période t , la consommation réelle $C^*(t)$ est dévoilée. Si $P_{prev} < C^*(t)$ le planificateur n'a pas à intervenir. Au contraire si $P_{prev} > C^*(t)$, le planificateur fait face à un excédent de production qui sera stockée, (sous contraintes) changeant alors la valeur de $e_{prev}(t)$ en une valeur effective e_t .

L'équation backward est ainsi modifiée en :

$$V(t, i, e) = \min_{f, j} \mathbb{E}[C^*(t) - i - (e - f^*) + V(t + 1, j, f^*)],$$

où le minimum est à prendre sur les réalisations f et j admissibles. f^* est la réalisation effective du stockage (fonction de f , de e , i et de $C^*(t)$). Rappelons que i représente la valeur de la production en t , e l'énergie disponible dans les stockages au temps $t - 1$, f le choix d'énergie prévue stockée en t et j la production prévue en t .

La valeur initiale est donnée par :

$$V(T, i, e) = \inf_{i, f} \mathbb{E}[C^*(T) - i - (e - f^*)].$$

L'implémentation algorithmique est analogue aux cas non stochastique. Pour la faisabilité pratique, on fait une discrétisation pour les valeurs possible des chocs ε_t . Contrairement à ce qui se passait précédemment, l'algorithme renvoie à l'utilisateur toutes les décisions optimales face à n'importe quelle valeur d'énergie en stock et de production : c'est pourquoi ce contrôle est dit opérationnel.

2.3.3 Directions de recherche

La limitation principale de l'approche inspirée du contrôle optimal réside sans aucun doute dans les temps de calcul qu'elle implique. Elle permet par ailleurs de traiter une très grande variété de cas (choix libre des paramètres, des coûts, de la taille du parc, et de la modélisation de l'aléa dans le cas stochastique). Pour remédier à ce problème, il faut donc améliorer les algorithmes qui ont ici été implémentés. Pour cela, il faudra prendre en

compte conjointement les résultats de la théorie de l'analyse numérique et le cahier des charges de l'industriel ainsi que les contingences pratiques. Concrètement, on peut déjà gagner du temps par rapport à un algorithme trop général en constatant que les courbes de consommation se construisent avec une donnée toutes les quinze minutes : il est donc inutile d'avoir une discrétisation plus fine que cela en temps. De plus, la discrétisation en puissance ainsi que celle du support d'un aléa éventuel n'a pas forcément besoin d'être extrêmement fine, selon les besoins et capacités pratiques des producteurs (que leur coûte une approximation de la solution optimale, peuvent-ils réellement ajuster le niveau de production à un très grand nombre de valeurs différentes ?). Bien sûr, tout cela doit être fait sous contrôle : il s'agit de quantifier l'erreur globale (en terme de fonction valeur) liée à l'approximation discrète. Enfin, il ne fait guère de doute que nos algorithmes peuvent être modifiés de façon à être plus efficaces, indépendamment du choix de précision pour la grille de discrétisation ; une direction à regarder attentivement afin de pouvoir traiter des parcs de plus grande taille.

3 Analyse convexe

3.1 (Re)Formulation du problème

Le problème reste le même que précédemment. On cherche à minimiser une fonction de coût. On se pose donc la question : quelle est la façon optimale de régler mes appareils pour que le coût net d'exploitation soit minimal ? La première difficulté est de définir une bonne fonction de coût, qui prend en compte assez de paramètres du problème tout en restant assez simple pour permettre une résolution numérique.

L'idée ici serait de trouver une formulation du problème qui nous permettrait d'utiliser les outils de l'optimisation convexe, outils qui permettent une résolution rapide et efficace.

3.1.1 Une fonctionnelle naïve

On imagine qu'il n'y a qu'un seul producteur qui délivre une puissance P et un seul appareil de stockage qui délivre une puissance S . Les contraintes ne sont pas importantes pour comprendre l'exemple, il n'en est donc pas tenu compte.

Si la fonction de coût V ne prend en compte que la différence entre la puissance nette fournie ($P + S$) et la consommation C , elle peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$V(P, S) = \|C - (P + S)\|_1 = \int_0^T |C_t - (P_t + S_t)| dt.$$

Imaginons maintenant que la fonction de consommation, C , est constante. Il est alors impossible de distinguer entre les deux cas suivants :

- P est constante, égale à C , et $S = 0$.

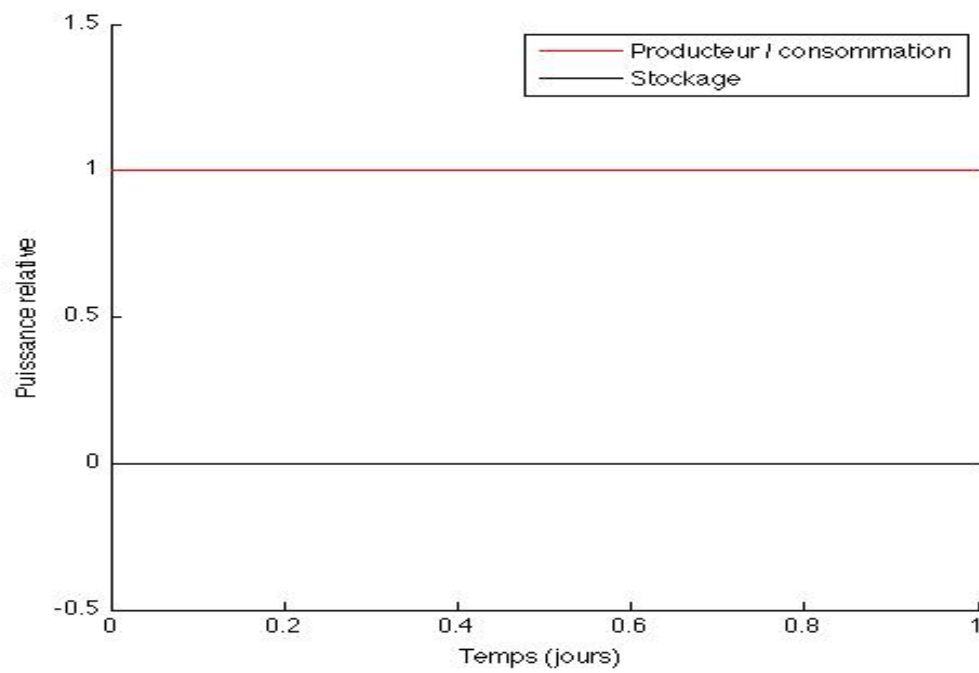


FIGURE 8

- P et S varient inversement l'une de l'autre.

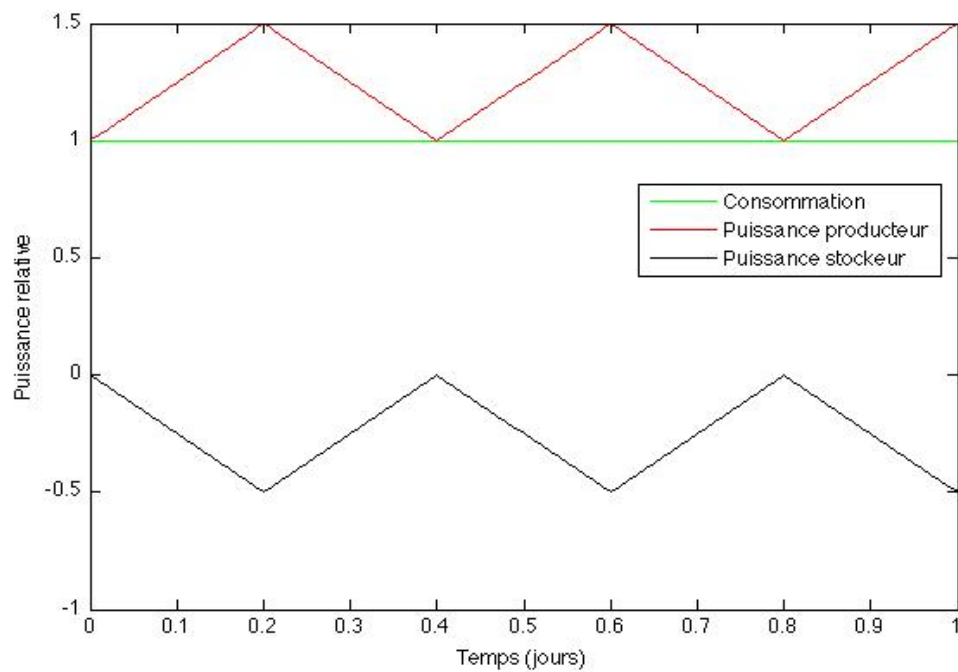


FIGURE 9

Ceci est problématique : d'un point de vue pratique, il est évident que la première situation doit être favorisée. Les variations de puissance et de stockage ont un coût pour l'industriel, que ce soit un coût immédiat (faire varier brusquement stockage et production coûte en soi de l'énergie) ou un coût sur le long terme en terme d'usure plus rapide des dispositifs. Notre fonctionnelle est donc trop naïve : il est nécessaire de la modifier afin de distinguer entre les deux régimes différents qui apparaissent plus haut.

3.1.2 Une « bonne » fonctionnelle

Une idée simple pour que notre fonctionnelle sélectionne le bon candidat dans l'exemple précédent est visiblement de pénaliser les variations trop rapides de P et S . Afin de nous placer dans un cadre de résolution agréable, tout du moins algorithmiquement, le choix se portera sur une fonctionnelle convexe, voire quadratique.

On définit donc la fonctionnelle V par la formule suivante :

$$V(C, \mathbb{P}, \mathbb{S}) = \left\| C - \sum_{i=1}^{n_{\text{prod}}} P^i - \sum_{j=1}^{n_{\text{stock}}} S^j \right\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n_{\text{prod}}} \lambda_i \|\dot{P}^i\|_2^2 + \sum_{j=1}^{n_{\text{stock}}} \mu_j \|\dot{S}^j\|_2^2 \quad (3)$$

où $\mathbb{P} = (P^1, \dots, P^{n_{\text{prod}}})$, $\mathbb{S} = (S^1, \dots, S^{n_{\text{stock}}})$, n_{prod} désigne le nombre de producteurs et n_{stock} le nombre de stockages. On ne fait pas d'hypothèse sur les producteurs et les stockages, c'est-à-dire que deux P^i (resp S^i) distincts peuvent désigner deux producteurs (resp stockages) de nature identique ou distincte.

Les deux termes de la fonction de coût pénalisent chacun un régime de fonctionnement :

- Le terme $\left\| C - \sum_{i=1}^{n_{\text{prod}}} P^i - \sum_{j=1}^{n_{\text{stock}}} S^j \right\|_2^2$ tend à minimiser la différence entre la fonction de demande C et la puissance fournie par l'ensemble des opérateurs.
- Le terme $\sum_{i=1}^{n_{\text{prod}}} \lambda_i \|\dot{P}^i\|_2^2 + \sum_{j=1}^{n_{\text{stock}}} \mu_j \|\dot{S}^j\|_2^2$ est présent pour pénaliser les changements de régimes. C'est cette modification qui nous permet de faire disparaître la situation précédemment présentée (Figure 9).

Pour des raisons techniques et temporelles, c'est sur cette fonctionnelle que nous avons focalisé notre attention. Mais il est déjà intéressant de remarquer quelques limitations du modèle, auxquelles nous répondrons très partiellement à la fin de cette partie. Cette fonctionnelle ne pénalise que les changements de régime de fonctionnement. Pour avoir une fonctionnelle plus complète, qui prendrait en compte le coût d'entretien des machines par exemple, il pourrait être intéressant d'introduire une pénalisation dépendant du nombre de machines. On pourrait aussi chercher une fonctionnelle qui modéliserait les coûts de stockage, c'est à dire le rendement des appareils de stockage. Afin de rester dans un cadre classique, celui de la minimisation d'une fonctionnelle quadratique sous contraintes linéaires, et pour une certaine simplicité des calculs nous ne nous intéresserons par la suite qu'à la fonctionnelle V définie en (11).

3.1.3 Les contraintes

Rappelons que nous devons, comme présenté dans la section précédente, tenir compte des contraintes physiques des appareils :

- La puissance que délivre les producteurs se trouve dans un certain intervalle, ou est égale à 0, *i.e.*

$$\forall i, P^i \in \{0\} \cup [P^{i,\min}, P^{i,\max}]. \quad (4)$$

- La puissance que peut donner ou absorber les appareils de stockage est elle aussi bornée, *i.e.*

$$\forall j, |S^j| < S^{j,\max}. \quad (5)$$

- Le régime de fonctionnement des producteurs ne peut pas varier trop vite, ce qui donne :

$$\forall i, |\dot{P}^i| \leq \text{Var}^{i,\max}. \quad (6)$$

- Les stockeurs ne peuvent pas absorber autant d'énergie que voulu (et ne peuvent pas non plus en donner autant que voulu). Si E_0^j est l'énergie stockée dans le stockeur S^j à l'instant 0, il faut :

$$0 \leq - \int_0^t S_s^j ds + E_0^j \leq E^{j,\max}. \quad (7)$$

- Le marché de l'énergie pénalise aussi énormément quand la production nette (c'est à dire la somme des puissances délivrées par les producteurs et les stockeurs) est plus grande que la consommation. On a donc la dernière contrainte suivante

$$\sum_{i=0}^{n_{\text{prod}}} P^i + \sum_{j=0}^{n_{\text{stock}}} S^j \leq C. \quad (8)$$

Il est clair que la contrainte (4) n'est pas convexe. Pour nous raccrocher à notre cadre, on la remplacera dans la suite par la contrainte suivante :

$$\forall i, P^i \in [\tilde{P}^{i,\min}, P^{i,\max}], \quad (9)$$

où $\tilde{P}^{i,\min}$ sera choisi soit égal à 0 soit à $P^{i,\min}$, selon le régime que l'on veut modéliser.

3.1.4 Formulation explicite du problème

Le problème se formule donc de la manière suivante. On cherche à trouver $(\mathbb{P}_0, \mathbb{S}_0)$ tels que :

$$V(C, \mathbb{P}_0, \mathbb{S}_0) = \min V(C, \mathbb{P}, \mathbb{S}),$$

où le minimum est pris sur tous les couples (\mathbb{P}, \mathbb{S}) vérifiant les conditions (5), (6), (7), (8) et (9) et où V est défini en (11).

On s'intéressera dans une dernière partie aux possibilités pour traiter la condition (4) et à la manière d'incorporer les contraintes liées à l'énergie nucléaire.

3.2 Résolution

3.2.1 Formulation discrète

Le problème est intrinsèquement discret. En effet, ERDF n'enregistre la consommation que tous les quarts d'heure. Les fonctions P^i et S^j du problème 3.1.4 peuvent donc s'écrire

sous la forme d'ensemble de points, donnant le « réglage » de chaque appareil tous les quarts d'heure. A l'échelle d'une journée le problème est quasiment périodique, la consommation étant presque périodique d'un jour sur l'autre. On va donc s'intéresser à un nombre de points de l'ordre de $N = 100 \simeq 4 \cdot 24$. Le problème se réécrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \min \left[\sum_{t=0}^N \left| C_t - \sum_{i=1}^{n_{\text{prod}}} P_t^i - \sum_{j=1}^{n_{\text{stock}}} S_t^j \right|^2 + \sum_{t=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{n_{\text{prod}}} \lambda_i |P_{t+1}^i - P_t^i|^2 + \sum_{t=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{n_{\text{stock}}} \mu_j |S_{t+1}^j - S_t^j|^2 \right], \\ P_t^i \in [\tilde{P}^{i,\min}, P^{i,\max}], \\ |S_t^j| \leq S^{j,\max}, \\ |P_{t+1}^i - P_t^i| \leq \text{Var}^{i,\max}, \\ E^{j,\min} \leq \sum_{s=0}^t S_s^j \leq E^{j,\max}, \\ \sum_{i=0}^{n_{\text{prod}}} P_t^i + \sum_{j=0}^{n_{\text{stock}}} S_t^j \leq C_t. \end{aligned}$$

Si on pose $X = {}^t(P_0^1, \dots, P_N^1, \dots, P_0^{n_{\text{prod}}}, \dots, P_N^{n_{\text{prod}}}, S_0^1, \dots, S_N^1, \dots, S_0^{n_{\text{stock}}}, \dots, S_N^{n_{\text{stock}}})$, on peut facilement réécrire le problème sous la forme :

$$\begin{aligned} \min_X \|AX - B\|^2, \\ DX \leq d_1, \\ d_2 \leq x \leq d_3, \end{aligned} \tag{10}$$

où A, B, D, d_1, d_2 et d_3 s'expriment facilement en fonction des données technologiques. La formulation (10) du problème est la formulation classique d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique sous contraintes linéaires. Il existe des algorithmes rapides pour résoudre ce type de problème. Il est de plus à noter que théoriquement le minimum existe et est unique dans ce cas là, contrairement à la formulation 3.1.4 où même l'existence n'est pas garantie.

3.2.2 Résultats numériques

Etant donné le temps imparti, nous avons préféré utiliser un algorithme déjà implémenté dans Matlab pour résoudre ce problème. Cette méthode est basée sur une méthode du gradient. Il serait possible d'optimiser l'algorithme pour l'adapter au problème qui nous intéresse, par exemple en prenant en compte le fait que les matrices que nous considérons sont très creuses et connues.

- **Un seul producteur.** On traite d'abord grace à cette méthode le cas d'un seul producteur. Après assez d'itérations on arrive à une solution très proche de la solution exacte, présentée dans la figure 1, obtenue à l'aide de la méthode du « contrôle optimal ».

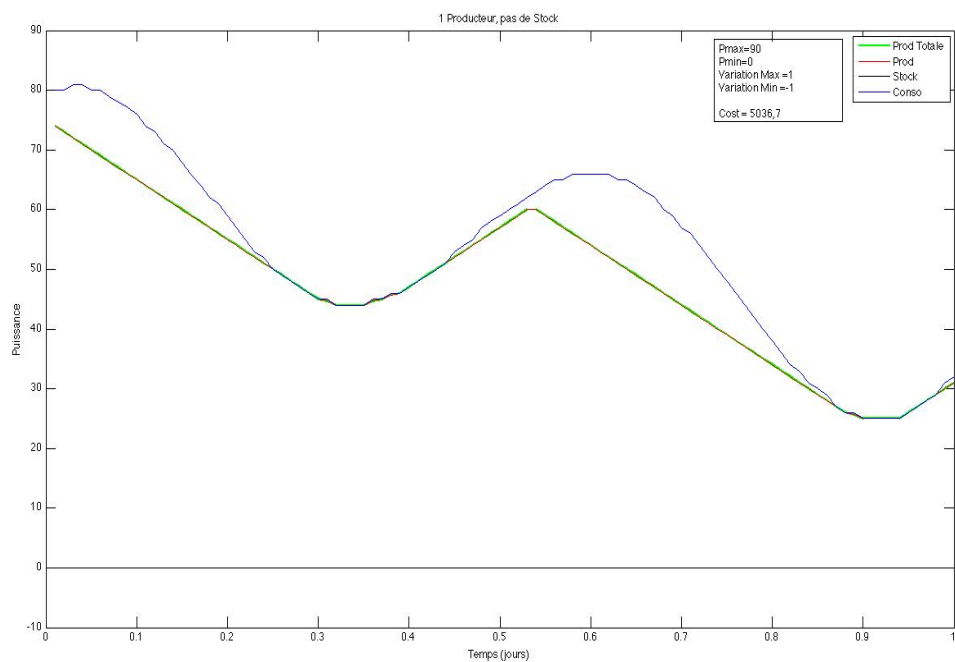


FIGURE 10

- Un producteur et un stockage.

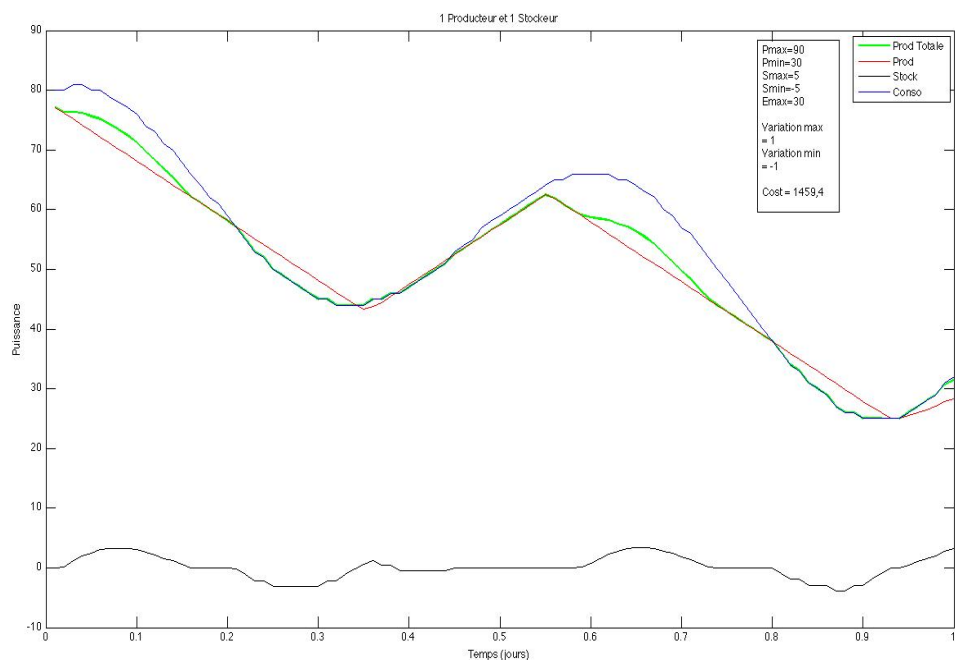


FIGURE 11

- Deux producteurs et un stockage.

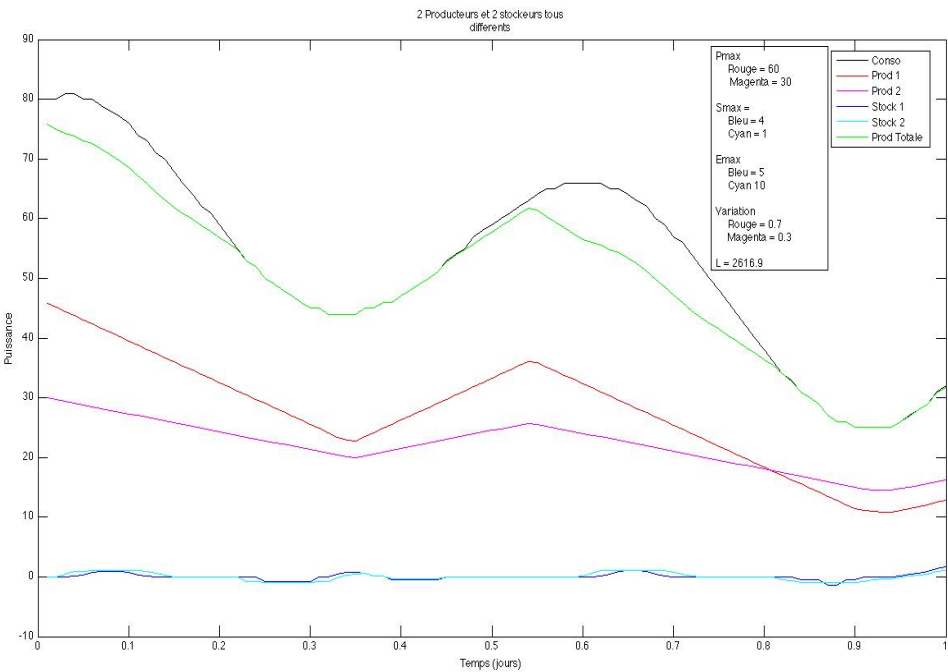


FIGURE 12

- Quatre producteurs et trois stockages.

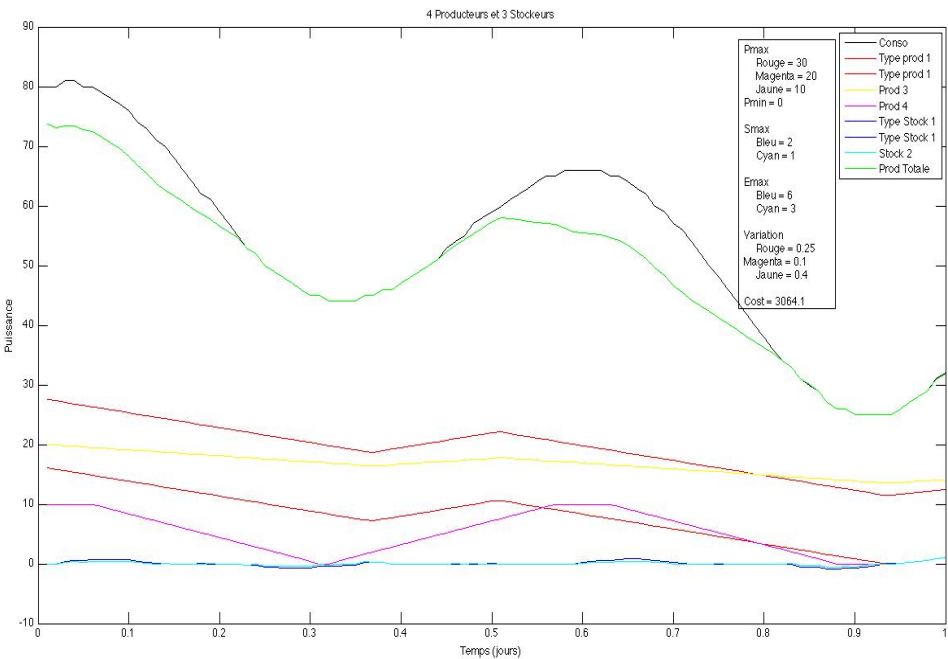


FIGURE 13

Remarquons que ce modèle simplifié nous donne déjà quelques informations qualitatives intéressantes que pourraient utiliser un modèle plus complet. Par exemple, dans nos tests, les stockages ont tous approximativement le même comportement, ce qui n'est pas du tout le cas des producteurs. On pourrait donc penser qu'il est équivalent d'avoir plusieurs stockages ou un seul gros stockage aux caractéristiques à déterminer. Cela simplifierait le problème et écourterait le temps de calcul.

3.2.3 Limitation du modèle et quelques éléments de réponse.

Ce modèle et la résolution afférente présentent plusieurs avantages. Tout d'abord, la méthode de résolution ne change pas en fonction du nombre d'appareils. Les matrices qui permettent la formulation (10) s'expriment très bien grace aux données du problème. Enfin il existe pour la résolution numérique du problème des algorithmes standards efficaces.

Du point de vue de la modélisation, la principale limitation de cette méthode vient du fait qu'elle nécessite des contraintes convexes. En particulier, nous avons modifié la contrainte (4) en une contrainte linéaire. Une manière de conserver cette contrainte serait de la traiter par relaxation : plutôt que d'imposer la contrainte, on rajoute un terme pénalisant dans la fonctionnelle. On pourrait par exemple considérer :

$$V(C, \mathbb{P}, \mathbb{S}, \delta_1, \delta_2) = \left\| C - \sum_{i=1}^{n_{\text{prod}}} P^i - \sum_{j=1}^{n_{\text{stock}}} S^j \right\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n_{\text{prod}}} \lambda_i \|\dot{P}^i\|_2^2 + \sum_{j=1}^{n_{\text{stock}}} \mu_j \|\dot{S}^j\|_2^2 + \delta_1 \sum_{i=1, t}^{n_{\text{prod}}} |\max(P^i(t), \delta_2)| \min(0, P^i(t) - P^{i, \text{min}})|.$$

Bien sûr de nouveaux problèmes surgissent : la fonctionnelle n'est plus quadratique, et contrairement aux facteurs λ_i et μ_j qui avaient un sens pour l'utilisateur puisqu'ils correspondaient à des facteurs de coût d'usure pour les machines il faut calibrer δ_1 et δ_2 pour trouver le bon niveau de pénalisation. Enfin, il faut trouver un algorithme permettant d'obtenir une solution approchée.

Remerciements

Nous remercions chaleureusement les organisateurs de la SEME 2012 pour nous avoir permis de travailler dans un très bon environnement. Nous remercions également M. Gilles Perrin pour nous avoir donné un sujet très intéressant et qui nous aura fait réfléchir et apprendre durant cette semaine.